УДК 621.874

В.П. Кондрахин /д.т.н./, В.Э. Кошелев
ГОУ ВПО «Донецкий национальный технический университет» (Донецк)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ И ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ГРУЗА НА КРАНЕ С ПОДВИЖНОЙ ГРУЗОВОЙ ТЕЛЕЖКОЙ

Разработана математическая модель колебаний груза на подъемном кране с подвижной тележкой при заданных режимах разгона и торможения подъемного механизма и тележки. Модель учитывает взаимосвязь вертикальных и поперечных колебаний груза и позволяет выполнить оптимизацию режима работы крана. Выполнено моделирование на компьютере и установлены особенности процесса подъема и опускания груза при неравномерно движущейся тележке.

Ключевые слова: *математическая модель, груз, кран, подвижная тележка, колебания.*

Постановка проблемы

В промышленности широко используются подъемные краны с подвижной тележкой подъема грузов (башенные, мостовые, полукозловые и козловые). Отличительной особенностью таких кранов является то, что грузовая тележка в общем случае совершает двухмерное движение в горизонтальной плоскости. В связи с этим концевой груз кроме перемещения в вертикальном направлении также перемещается в поперечных направлениях. Такое совмещение во времени операций по подъему и перемещению груза обеспечивает повышение производительности подъемного крана. Однако в переходных режимах разгона и торможения механизмов крана возникают сложные пространственные колебания груза, амплитуды которых могут возрастать до недопустимых значений.

Анализ последних исследований и публикаций

В работах [1…6] рассмотрены вопросы математического моделирования колебаний грузов применительно к кранам с подвижной грузовой тележкой. Однако в них не учитывается взаимовлияние вертикальных и поперечных колебаний груза, возникающих при переходных режимах разгона и торможения механизмов кранов. В них также отсутствует сравнительный анализ поперечных колебаний при подъеме и опускании груза.

Цель (задачи) исследования

Целью данной работы является разработка математической модели колебаний груза в процессе его неравномерного перемещения подъемным краном с подвижной тележкой, учитывающей взаимосвязь вертикальных и поперечных колебаний, а также моделирование процесса колебаний подъема (опускания) и перемещения тележки.

Основной материал исследований

Рассмотрим простейший вариант (рис. 1) подъема или опускания груза в такого рода кранах, когда тележка совершает одномерное движение вдоль моста или стрелы. При разработке расчетной схемы и математической модели приняты следующие допущения: груз рассматривается как материальная точка; упругие и диссипативные свойства каната приняты линейными.

Будем считать, что перемещение тележки задано, и при этом скорость $V(t)=\dot{X}(t)$ и ускорение $a(t)=\dot{V}(t)=\ddot{X}(t)$ тележки изменяются так, как показано на рис. 2 (здесь $X(t)$ – текущая горизонтальная координата тележки, отсчитываемая от ее некоторого первоначального положения).

Задан также угол поворота $\varphi_б$ барабана, причем угловая скорость ω и угловое ускорение ε барабана подъемного механизма изменяются по аналогичным законам. Из этого следует, что аналогичным образом изменяется и длина отвеса каната. Таким образом, расчетная схема представляет собой математический маятник на упругой нити переменной длины с подвижной точкой подвеса.

Запишем координаты груза в форме

$$x_0=X(t)+l\sin\psi,\ y_0=l_0-\cos\psi,$$

где l_0 – начальная длина отвеса каната; l – текущая его длина; ψ – угол, образуемый отвесом подъемного каната с вертикалью.

После дифференцирования по времени получим проекции скорости груза

$$\dot{x}_0 = \dot{X}_0(t) + \dot{l}\sin\psi + l\dot{\psi}\cos\psi,$$
$$\dot{y}_0 = -\dot{l}\cos\psi + l\dot{\psi}\sin\psi.$$

Отсюда квадрат скорости груза определится в формуле

$$V_0^2 = \dot{X}^2 + 2\dot{X}(\dot{l}\sin\psi + l\dot{\psi}\cos\psi) + \dot{l}^2 + l^2\dot{\psi}^2,$$

а кинетическая энергия груза массой m будет иметь вид:

$$T = \frac{m}{2}[\dot{X}^2(t) + 2\dot{X}(t)(\dot{l}\sin\psi + l\dot{\psi}\cos\psi) + \dot{l}^2 + l^2\dot{\psi}^2]. \quad (1)$$

Упругое удлинение качающегося отвеса каната определим как разность намотанной на барабан длины каната $R_б\varphi_б$ и фактического сокращения длины каната на величину $(l_0–l)$ в текущий момент времени:

$$\delta l = R_б\varphi_б - (l_0 - l),$$

где $R_б$ – радиус барабана.

Тогда общая потенциальная энергия системы представится в форме

$$П = \frac{C_к}{2}[R_б\varphi_б - (l_0 - l)]^2 + mg(l_0 - l\cos\psi), \quad (2)$$

где $C_к=K/l_{ср}$ – коэффициент жесткости отвеса каната; K – коэффициент, зависящий от материала, диаметра и конструкции каната, а также от кратности полиспаста механизма подъема крана; $l_{ср}=l_0–R_б\varphi_б$ – «средняя» длина каната (без учета упругих деформаций).

Функция Лагранжа

$$L=T–П. \quad (3)$$

Диссипативная функция Рэлея для данной системы

$$R = \frac{\beta_к}{2}(R_б\omega + \dot{l})^2, \quad (4)$$

где $\beta_к$ – коэффициент сопротивления каната.

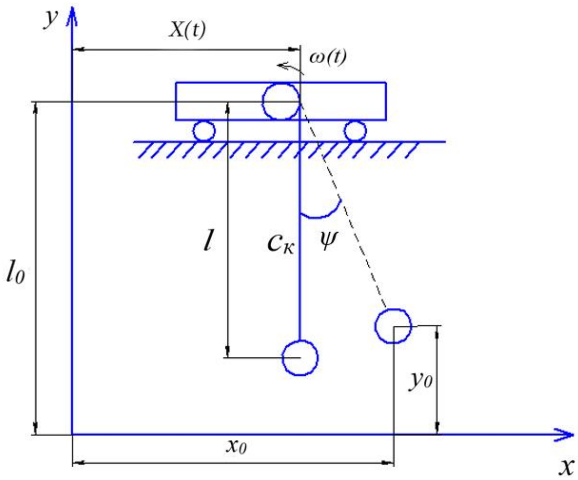

Рис. 1. Расчетная схема крана с подвижной тележкой

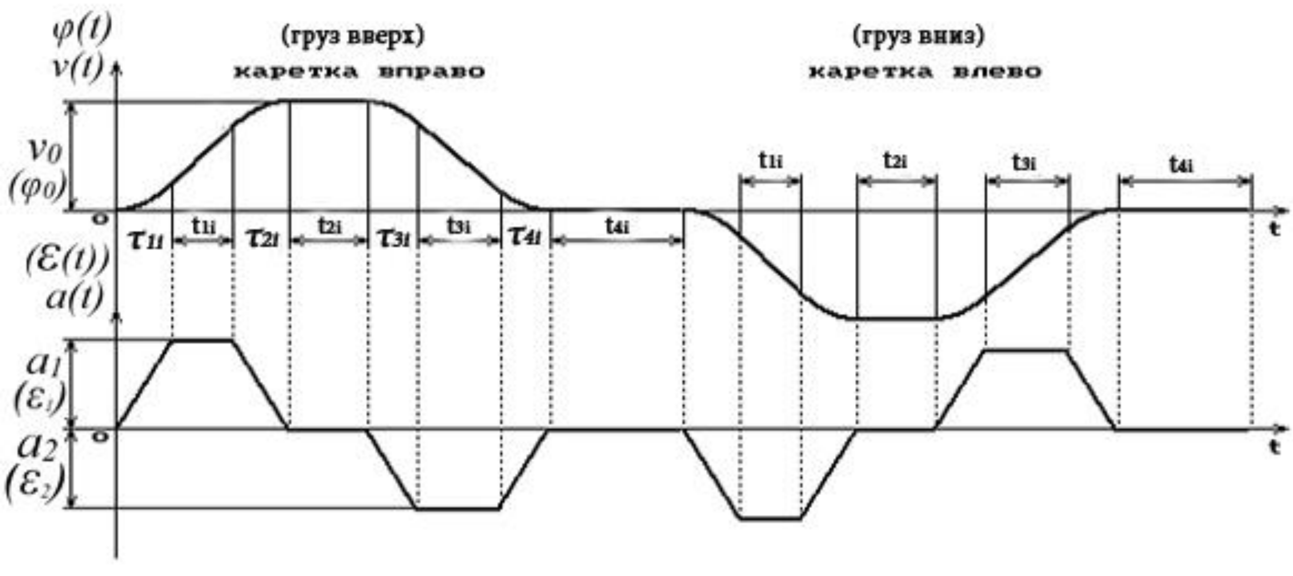

Рис. 2. Изменение скорости и ускорений тележки (каретки) при ее горизонтальном перемещении (i=1) и угловой скорости и углового ускорения барабана подъемного механизма (i=2)

ISSN 2518-1653 (online). Интернет: vestnik.donntu.org

В уравнениях Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}+\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}=0 \qquad (5)$$

в качестве обобщенных координат рассматриваемой системы целесообразно принять $q_1=l$, $q_2=\psi$, а обобщенные непотенциальные силы: $Q_1=0$, $Q_2=0$.

Теперь определим в соответствии с (1…5) частные производные от функции Лагранжа по обобщенным координатам:

$$\frac{dL}{dl}=-C_к[R_б\varphi_б-(l_0-l)]+mg\cos\psi+$$
$$+m\dot{X}\dot{\psi}\cos\psi+ml\dot{\psi}^2.$$

$$\frac{dL}{d\psi}=-mgl\sin\psi-m\ddot{X}\dot{l}\cos\psi-ml\dot{X}\dot{\psi}\sin\psi.$$

Далее имеем:

$$\frac{dL}{d\dot{l}}=m\dot{l}+m\dot{X}\sin\psi,$$

$$\frac{dL}{d\dot{\psi}}=ml^2\dot{\psi}+ml\dot{X}\cos\psi,$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{l}}=\beta_к(R_б\omega+\dot{l}),$$

и тогда уравнения колебаний груза будут иметь вид

$$\begin{cases} m(\ddot{X}\sin\psi+\ddot{l})+\beta_к(R_б\omega+\dot{l})+ \\ +C_к[R_б\varphi_б-(l_0-l)-mg\cos\psi-ml\dot{\psi}^2=0, \\ l\ddot{\psi}+\ddot{X}\cos\psi+2\dot{l}\dot{\psi}+g\sin\psi=0. \end{cases} \qquad (6)$$

Полученную систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с изменяющимися коэффициентами можно решить одним из численных методов, например, методом Рунге-Кутта. Для этого введем новые переменные

$u_0=\dot{l}$, $u_1=l$, $u_2=\dot{\psi}$, $u_2=\psi$.

Теперь можно решить систему относительно первых производных

$$\begin{cases} \dot{u}_0=g\cos u_3+u_1u_2^2-\dfrac{\beta_к(R_б\omega+u_0)}{m}- \\ -\dfrac{C_к(R_б\omega t-l_0+u_1)}{m}, \\ \dot{u}_1=u_0, \\ \dot{u}_2=-\dfrac{\ddot{X}\cos u_3+2u_0u_2+g\sin u_3}{u_1}, \\ \dot{u}_3=u_2. \end{cases}$$

Разработанная математическая модель использовалась для моделирования колебаний груза на полукозловом кране грузоподъемностью 40 т, предназначенном для погрузки и разгрузки контейнеров на НПО «Ясиноватский машиностроительный завод». При этом рассматривались режимы равномерного подъема и опускания грузов различной массы со скоростью 0,195 м/с при разгоне и торможении грузовой тележки согласно диаграмме на рис. 2. Установившиеся значения скорости тележки 0,1 м/с, ускорения тележки 0,1 м/с^2.

На рис. 3 показан график изменения во времени (сек) угла отклонений Ψ (рад) отвеса каната от вертикали при подъеме типичного для рассматриваемого крана груза массой 20 т.

Как видно из графика, груз совершает поперечные колебания с небольшой амплитудой (менее 0,5°) и частотой примерно 0,14 Гц, причем по мере подъема амплитуда уменьшается, а частота колебаний увеличивается. Это объясняется уменьшением длины каната при подъеме груза от 13,5 м до 3,5 м и соответствующим увеличением коэффициента жесткости каната, а также наличием демпфирующего слагаемого во втором уравнении системы (6). Изменение характера колебаний на 28 секунде объясняется началом процесса торможения тележки.

На рис. 4 показан график изменения во времени t (сек) упругой силы F (Н) в подъемном канате при подъеме груза массой 20 т. Упругая сила в отвесе каната, вследствие жесткого рывка, достигает значения, в 2 раза превышающего номинальное значение веса груза. С течением времени эти колебания затухают. Частота колебаний составляет в начале подъема 4,5 Гц, а затем повышается по мере уменьшения длины каната и повышения его коэффициента жесткости. Частота вертикальных колебаний груза значительно (примерно в 30 раз) больше частоты поперечных колебаний. Отсюда следует вывод о незначительной связанности продольных и поперечных колебаний груза для рассматриваемого крана.

При опускании груза характер динамических процессов существенно изменяется. Так на

ISSN 2518-1653 (online). Интернет: vestnik.donntu.org

рис. 5 приведен график изменения во времени (сек) угла отклонений Ψ (рад) отвеса каната от вертикали при опускании с постоянной скоростью 0,195 м/с груза массой 20 т. При опускании груза в рассматриваемом случае длина каната увеличивается от 3,5 м до 13,5 м. Процесс равномерного опускания груза при неравномерно движущейся тележке сопровождается ростом амплитуд поперечных колебаний груза (до 5,7°) с одновременным снижением их частоты от 0,2 Гц до 0,15 Гц. Такое раскачивание груза объясняется наличием слагаемого $2\dot{l}\dot{\psi}$ во втором уравнении системы (6). При подъеме груза скорость $\dot{l}$ в среднем положительная, поэтому слагаемое $2\dot{l}\dot{\psi}$ действует как демпфирующий фактор. При опускании груза скорость $\dot{l}$ в среднем отрицательная по знаку, поэтому слагаемое $2\dot{l}\dot{\psi}$ играет роль «возбуждающего» фактора. Очевидно, что уменьшить это «возбуждающее» влияние можно за счет снижения скорости опускания груза. Как показал вычислительный эксперимент, при уменьшении скорости опускания груза до 0,04 м/с амплитуда раскачивания груза увеличивается не существенно, угол отклонения каната от вертикали не превышает 0,86°. Таким образом, при опускании груза рассматриваемым краном с одновременным неравномерным движением тележки возможен существенный рост амплитуд раскачивания груза, что может представлять опасность для груза и оборудования крана. Снизить амплитуды раскачивания груза можно за счет уменьшения скорости его опускания.

Выводы

Разработана математическая модель в виде системы двух нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с изменяющимися коэффициентами, которая учитывает взаимодействие продольных и поперечных колебаний груза кранов с подвижной кареткой в переходных режимах работы. Процесс опускания груза при неравномерно движущейся тележке, в отличие от процесса его подъема, сопровождается ростом амплитуд поперечных колебаний.

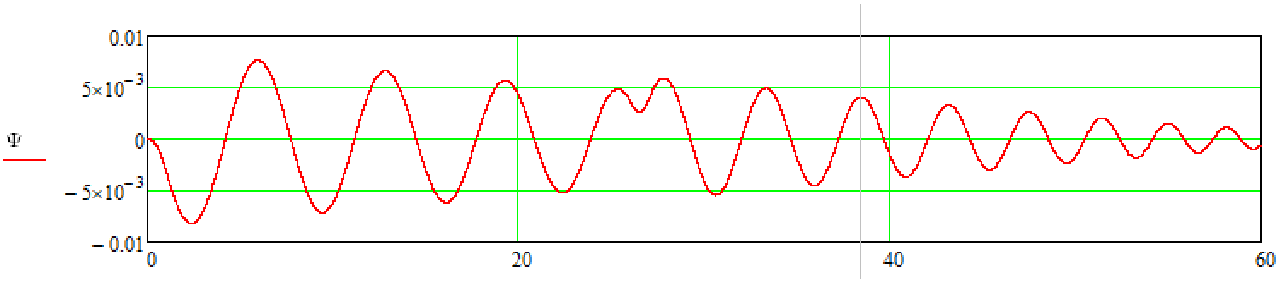

Рис. 3. График изменения во времени (сек) угла отклонений отвеса каната от вертикали (рад) при подъеме груза массой 20 т.

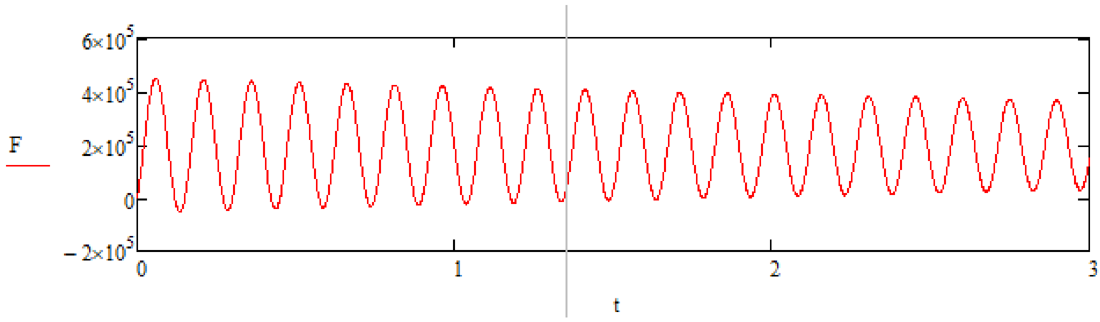

Рис. 4. График изменения во времени *t* (сек) упругой силы *F* (Н) в подъемном канате при подъеме груза массой 20 т.

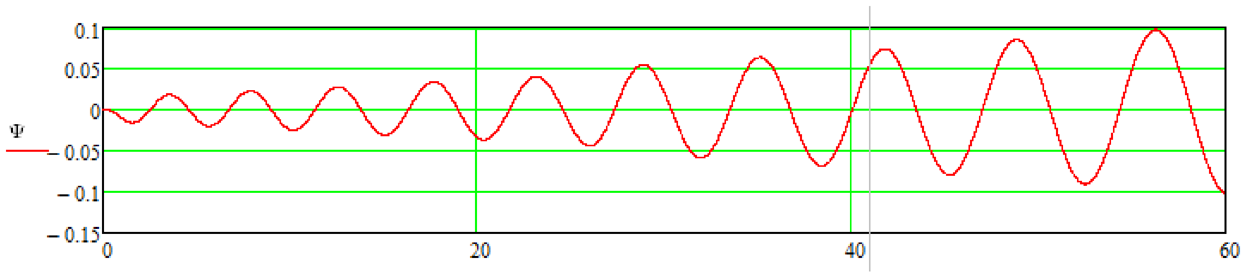

Рис. 5. График изменения во времени (сек) угла отклонений отвеса каната от вертикали (рад) при опускании груза массой 20 т.

Эффективно снижать амплитуды поперечных колебаний при опускании груза можно за счет снижения скорости опускания. Разработанная модель позволяет определить максимальные поперечные перемещения груза и максимальные динамические усилия в подъемном канате при любом заданном законе перемещения каретки и вращения барабана механизма подъема и может быть использована при оптимизации режима работы крана.

Список литературы

1. Комаров, М. С. Динамика грузоподъемных машин / М. С. Комаров. – М.: Машгиз, 1967. – 267 с.
2. Долотов, А.М. Раскачивание груза при пуске и остановке механизма перемещения / А.М. Долотов, С.В. Калашников // Механики XXI веку. – 2008. – №7. – С. 6-8.
3. Будиков, Л.Я. Многопараметрические исследования динамики мостовых кранов: Учебное пособие / Л. Я. Будиков. – Луганск: изд. Луганского национ. ун-та им. В. Даля, 2017. – 236 с.
4. Huasen Liu, Wenming Cheng, Yinqi Li / Dynamic Responses of an Overhead Crane's Beam Subjected to a Moving Trolley with a Pendulum Payload // Hindawi Shock and Vibration Volume 2019, Article ID 1291652, 14 pages https://doi.org/10.1155/2019/1291652.
5. Maximov,J.T., Dyunchev, V.P. Investigation of dynamic response of «bridge girder telpher-load» crane system due to telpher motion. Coupled Systems Mechanics, 2018, 7 (4), 485-507.
6. Raksha S. V. et al. MATHEMATICAL AND S-MODELS OF CARGO OSCILLATIONS DURING MOVEMENT OF BRIDGE CRANE //Scientific Bulletin of National Mining University. – 2019. – №. 2, 108-115.

V.P. Kondrakhin /Dr. Sci. (Eng.)/, V.E. Koshelev
Donetsk National Technical University (Donetsk)

MATHEMATICAL MODELING OF VERTICAL AND TRANSVERSAL LOAD VIBRATIONS ON A CRANE WITH A MOVABLE CARGO TROLLEY

Background. *In tower, bridge, semi-gantry and gantry cranes, the cargo moves in a horizontal plane with the help of a cargo trolley, while it is possible to combine the operations of lifting (lowering) the cargo and its transverse movements in time. In transient modes of acceleration and deceleration of crane mechanisms, complex spatial fluctuations of the load occur, the amplitudes of which can increase to unacceptable values.*

Materials and/or methods*. To study the process of load oscillations in the vertical and transverse directions, the method of mathematical modeling was used. The mathematical model of load oscillations is compiled using the Lagrange equation of the second kind. The solution of the system of differential equations was carried out by a numerical method using a package of mathematical applied programs.*

Results. *A mathematical model of vertical and transverse oscillations of the load has been developed in the form of a system of two non-linear differential equations of the 2nd order with varying coefficients, taking into account the presence of a dynamic connection between the vertical and transverse oscillations of the load and the uneven nature of its movement in both directions. The analysis of load oscillations is carried out on the example of a semi-gantry crane with a lifting capacity of 40 tons. It is established that the frequencies of vertical and transverse oscillations of the load differ significantly, which determines the weak dynamic coupling of dynamic subsystems. When lowering the load with simultaneous uneven movement of the trolley, dangerous swinging of the load with increasing amplitude can occur.*

Conclusion. *Using computer simulation of the process of lifting and lowering a load by a crane with a movable cargo trolley, it was found that the process of lowering a load with an unevenly moving trolley, in contrast to the process of lifting it, is accompanied by an increase in the amplitudes of transverse vibrations. The developed mathematical model makes it possible to determine the maximum transverse movements of the load and the maximum dynamic forces in the hoisting rope for any given law of carriage movement and rotation of the lifting mechanism drum and can be used to optimize the crane operation mode.*

Keywords: *mathematical model, cargo, crane, movable cart, vibrations.*

Сведения об авторах

В.П. Кондрахин

SPIN-код:	9628-3575
Author ID:	6506839592
Телефон:	+380 (71) 334-90-07
Эл. почта:	vkondrakhin52@mail.ru

В.Э. Кошелев

Телефон:	+380 (71) 312-12-24
Эл. почта:	vadim.koshelev1996@gmail.com

Статья поступила 08.12.2021 г.

Рецензент д.т.н., проф. О.Е. Шабаев